1 Maße

Sample size, Größe der Stichprobe N

1) Central location (sample mean), Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

2) Scale (standard deviation), Standardabweichung

$$s = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}$$

3) Shape (skewness), höhere Momente (Schiefe, Asymmetrie)

$$b = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s} \right)^3$$

2 Darstellung

probability density function: p.d.f., histogram, e.d.f.

3 Transformation

1) Centering, Zentrieren

2) Normalizing/Standardizing, Normieren

3) Normalizing, Normieren

4 Singular Value Decomposition

Let A be a real m-by-n matrix. The singular value decomposition (SVD) of A is the factorization

$$A = U\Sigma V^T$$

where U and V are orthogonal, and

$$\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$$
$$r = \min(m, n)$$
$$\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r \geq 0$$

The σ_i are called the singular values, the first columns of V the right singular vectors and the first r columns of U the left singular vectors.

5 Merken

$B = AA^T$ ist symmetrisch, denn

$$B^T = (AA^T)^T = A^{TT}A^T = AA^T = B$$

und positiv definit. Daher Zerlegung in

$$B = W\Lambda W^{-1}$$

$$AA^T = (U\Sigma V^T)(U\Sigma V^T)^T = U\Sigma V^T V\Sigma^T U^T = U\Sigma^2 U^T$$

D.h. $W = U$.

$$A^TA = (U\Sigma V^T)^T(U\Sigma V^T) = V\Sigma^T U^T U\Sigma V^T = V\Sigma^2 V^T$$

D.h. V ist Eigenvektor von B^T.

6 Berechnung der spektralen Dichte mittels Fourierdarstellung

Es wird nun von einer Zeitreihe $x(n)$ mit den N Werten $n = 0, 1, 2, ..., N-1$ ausgegangen. Die Fourier-Darstellung der Zeitreihe ist

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} F(k) \exp\left(\frac{i2\pi nk}{N}\right) \tag{1}$$

mit:
n = Zeitschrittzähler
k = Wellenzahl
k = 0, entspricht dem Mittelwert
F(k) = Fourierkomponente bei der Wellenzahl k
k/N = f = Frequenz
N/k = τ = Periode.

Inverse Transformation :

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x(n)}{N} \exp\left(\frac{-i2\pi nk}{N}\right) \tag{2}$$

also:

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x(n)}{N} \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) - i \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x(n)}{N} \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) . \tag{3}$$

Dabei ist $F(0)$ der Mittelwert $\overline{x}$ der Zeitreihe.

Die Fourier-Darstellung der Zeitreihe kann nun verwendet werden, um deren Varianz auszudrücken:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(x(n)-\overline{x})^2 = \sum_{k=1}^{N-1} F(k)^2 = \sum_{k=1}^{N-1}\sigma^2(k). \qquad (4)$$

Dabei ist zu beachten, da die Summe über die Fourier-Komponenten bei 1 beginnt, da der Mittelwert (Die Schwingung mit der Wellenzahl 0) nicht zur Varianz beiträgt. $\sigma^2(k)$ ist die spektrale Varianz der untersuchten Zeitreihe bei der Wellenzahl k und setzt sich zusammen aus:

$$\sigma^2(k) = F(k)^2 = Re(F(k))^2 + Im(F(k))^2. \qquad (5)$$

Trägt man $\sigma^2(k)$ gegen k auf, so erhält man das Periodogramm bzw. das geschätzte Varianzspektrum. Für eine Zeitreihe der Länge besteht besteht es theoretisch aus Werten N-1 Werten.

7 Der Einfluß der Verwendung von Mittelwerten

Es handelt sich dabei um die Untersuchung von Zeitreihen von Zeitmitteln. D.h. es wird nicht zu bestimmten Zeitpunkten ein Meßwert aufgenommen und daraus ergibt sich die Zeitreihe, sondern es wird immer über konstante Zeiträume gemittelt. Die so entstehenden Zeitreihen sind dann z.B. Zeitreihen von Jahres-, Monats- oder Tagesmittelwerten.

$$X(t) = A_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right). \tag{6}$$

Tastet man diese Funktion in Abständen n ab, so erhält man die Folge:

$$x_n = A_0 \sin\left(\frac{2\pi n}{\tau}\right). \tag{7}$$

Für die Folge der Mittelwerte über Intervalle der Länge 1 gilt:

$$\begin{aligned} \overline{x}_n &= \int_n^{n+1} A_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) dt \\ &= -A_0 \frac{\tau}{2\pi}\left[\cos\left(\frac{2\pi n}{\tau}\right) - \cos\left(\frac{2\pi(n+1)}{\tau}\right)\right]. \end{aligned}$$

Nun ist $\cos(x) - \cos(y) = -2\sin(\frac{x}{2}+\frac{y}{2})\sin(\frac{x}{2}-\frac{y}{2})$ und deshalb folgt:

$$\overline{x}_n = A_0 \frac{\tau}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{\tau}\right) \sin\left(\frac{2\pi n}{\tau} + \frac{\pi}{\tau}\right). \tag{8}$$

Demnach führt der Filter (Verwendung von Mittelwertzeitreihen) zur Amplitudendämpfung $a(\tau)$ und Phasendrehung $\Phi(\tau)$ mit:

$$a(\tau) = \frac{\tau}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{\tau}\right), \tag{9}$$

$$\Phi(\tau) = \frac{\pi}{\tau}. \tag{10}$$

Man beachte, daß für große Perioden τ die Phasenverschiebung gegen null und die Amplitudendämpfung gegen eins geht, das heißt niederfrequente Schwingungen werden von dem Filter nicht verändert.

Einfluß auf das Varianzspektrum:

$$\sigma^2 = \frac{1}{T}\int_0^T (x(t) - \overline{x})^2 dt \tag{11}$$

Dabei sei T der Beobachtungszeitraum und x(t) eine harmonische Schwingung.

$$\sigma^2 = \frac{A^2}{T}\int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) dt \tag{12}$$

mit der Lsung

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{A^2}{T}\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)}\sin\left(\frac{4\pi t}{\tau}\right)\right]_0^T \\ &= \frac{A^2}{2} - \frac{A^2\tau}{8\pi T}\sin\left(\frac{4\pi T}{\tau}\right)\end{aligned}$$

Mit $T = \frac{n}{4}\tau$ (und n aus den natürlichen Zahlen) folgt exakt

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}A^2. \tag{13}$$

Die Varianz einer konkreten Schwingung hängt erst durch die Einführung des Filters von der Periode ab. Dann nämlich gilt $A = a(\tau)A_0$ und somit für die spektrale Varianz der gefilterten Reihe:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{1}{2}a^2(\tau)A_0^2 = a^2(\tau)\sigma^2 \tag{14}$$

8 Autokorrelationsspektralanalyse (ASA)

Nach dem Wiener-Chinchin-Theorem kann das Spektrum auch aus der Autokorrelationsfunktion geschätzt werden.

$$
\begin{aligned}
\sigma^2(k) &= F(k)^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x(n)}{N} \exp\left(\frac{-i2\pi nk}{N}\right) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x(n)}{N} \exp\left(\frac{-i2\pi nk}{N}\right) \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x(n) \exp\left(\frac{-i2\pi nk}{N}\right) \cdot x(m) \exp\left(\frac{i2\pi mk}{N}\right) \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=m}^{m-N+1} x(m-l) \cdot x(m) \exp\left(\frac{i2\pi mk}{N}\right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{l=-(N-1)}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-|l|-1} x(m)\, x(m+|l|)\right] \exp\left(\frac{i2\pi lk}{N}\right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{l=-(N-1)}^{N-1} \mathrm{akf}(l) \cdot \exp\left(\frac{i2\pi lk}{N}\right)
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Dabei ist akf die Autokorrelationsfunktion zur Verschiebung l. Die spektrale Dichte ist demnach auch die Fourier-Transformierte der Autokorrelationsfunktion. Berechnet man sie auf diesem Weg, so bezeichnet man dies als Autokorrelationsspektralanalyse (ASA).